Réduction II

20 janvier 2019

1 Diagonalisations, cycles

1.1 Endo de $L(E)$

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On définit l'endomorphisme f de $L(E)$ par $f(u) = \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$. Quels sont les éléments propres de f ? f est-il diagonalisable ?

1.2

Soit $(m, n) \in \mathbf{N}^2$. Soit B un polynôme scindé à racines simples de $\mathbf{C}_{m+1}[X]$, et $A \in \mathbf{C}[X]$. Etudier le caractère diagonalisable de l'endomorphisme de $\mathbf{C}_m[X]$ qui à P associe le ~~quotient~~ reste de la division euclidienne de AP par B. Que se passe-t-il si B possède une racine double ?

1.3 Cartan

Soit A une sous-algèbre unitaire de $M_n(\mathbf{C})$ dont tous les éléments nilpotents sont nul. Montrer que tout élément de A est diagonalisable, puis que commutative. (Si e est idempotent et $a \in A$, $ea - eae$ est nilpotent donc nul donc $ea = eae = ae$).

1.4

Soit A une matrice diagonale de $M_n(\mathbf{C})$. Donner une CNS pour que A soit semblable à une matrice de $M_n(\mathbf{Q})$. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbf{Q}$ par $\mathbf{Z}$?

2 Topologie

2.1

Trouver les matrices $M \in SL_2(\mathbb{R})$ telles que la suite M^k soit bornée.

2.2

Soit $\|\|$ une norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{C})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ contenu dans la boule ouverte $B(I_n, \sqrt{2}$. Montrer que $G = \{I_n\}$.

2.3

Soit $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe. On note $I(G) = P \in \mathbb{C}[X_{i,j}] | \forall A \in G, P(A) = 0\}$ et $\hat{G} = \{B \in M_n\mathbb{C} | \forall P \in I(G), P(B) = 0\}$. Montrer que $\hat{G}$ est un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{C})$.